تجزیهٔ مقادیر منفرد، تقریب کم‌رنک و کانولوشن تفکیک‌پذیر

از اثبات ریاضی تا ارزیابی خطای فیلترکردن تصویر

یادداشت آموزشی ـ پژوهشی مبتنی بر مراجع دانشگاهی و آزمایش بازتولیدپذیر

آبان ۱۴۰۵ ـ اکتبر ۲۰۲۶

چکیده

مسئلهٔ اصلی چنین است: چگونه پنجرهٔ دوبعدی یک فیلتر را به جمعی از فیلترهای یک‌بعدی تبدیل کنیم، در چه حالتی این تبدیل دقیق است، و وقتی فقط چند جملهٔ تجزیه را حفظ می‌کنیم چرا تقریب حاصل از دیدگاه جبر خطی بهینه است؟ ابتدا تعریف کانولوشن و شرط رنک یک اثبات می‌شود؛ سپس تجزیهٔ دقیق رنک r، قضیهٔ بهینه‌بودن تقریب کم‌رنک با اثبات کامل برای نرم فروبنیوس و اثبات مکمل برای نرم طیفی، کران خطای تصویر و مبادلهٔ دقت با سرعت بررسی می‌شود. شش شکل اصیل محاسباتی، یک مثال حل‌شدهٔ جبری، یک مثال فیلتر لاپلاسین و یک آزمایش عددی مستقل برای پنجرهٔ 19×19 همراه متن ارائه شده‌اند. روابط نظری بر منابع ریاضی و دانشگاهی تصریح‌شده در انتهای متن تکیه دارند؛ شکل‌ها و داده‌های مصنوعی توسط کد همراه تولید شده‌اند و از منابع نقل نشده‌اند.

فهرست مطالب

۱ صورت مسئله و نقشهٔ استدلال ۳

۲ از کانولوشن دوبعدی تا شرط رنک یک ۳

۱.۲ تعریف دقیق کانولوشن ۳

۲.۲ چه زمانی پنجره تفکیک‌پذیر است؟ ۴

۳.۲ استخراج دو بردار بدون SVD ۴

۳ تجزیهٔ SVD برای رنک عمومی: برابری دقیق ۴

۱.۳ تعریف و نتیجهٔ اصلی ۴

۲.۳ چرا نمی‌توان در تجزیهٔ دقیق از r جمله کمتر داشت؟ ۵

۳.۳ تعبیر کانولوشنی دقیق برای رنک r ۵

۴.۳ مثال ساختاری: لاپلاسین رنک دو ۶

۴ تقریب رنک k: از تعریف تا قضیهٔ بهینگی ۶

۱.۴ مسئلهٔ بهینه‌سازی دقیقاً چیست؟ ۶
۲.۴ قضیهٔ Eckart–Young–Mirsky ۷
۳.۴ گام اول: خطای تقریب پیشنهادی را محاسبه می‌کنیم ۷
۴.۴ گام دوم: اثبات کامل کران پایین برای هر B ۷
۵.۴ اثبات مستقل برای نرم طیفی ۹
۶.۴ یگانگی، تساوی مقادیر منفرد و رنک عددی ۹

۵ مثال حل‌شدهٔ رنک سه و تقریب رنک‌های یک و دو ۹

۶ خطای تقریب در حوزهٔ پنجره و حوزهٔ تصویر ۱۰
۱.۶ دو مسئلهٔ متفاوتِ بهینه‌سازی ۱۰
۲.۶ کران نقطه‌ای با نامساوی کوشی–شوارتس ۱۱
۳.۶ کران سراسری با نامساوی کانولوشن ۱۱
۴.۶ انتخاب k بر اساس بودجهٔ خطای پنجره ۱۱

۷ تحلیل دقیق هزینهٔ محاسباتی ۱۲

۸ آزمایش بازتولیدپذیر: یک پنجرهٔ غیرتفکیک‌پذیر ۱۲
۱.۸ تعریف دقیق پنجره و تصویر مصنوعی ۱۲
۲.۸ مقایسهٔ عددی خطاها ۱۳
۳.۸ دستور اجرای مجدد آزمایش ۱۳

۹ نکات تخصصی و مواردی که نباید اشتباه برداشت شوند ۱۴

۱۰ جمع‌بندی ریاضی ۱۵

مراجع و پیوند دقیق به قسمت‌های اثبات ۱۶

۱ صورت مسئله و نقشهٔ استدلال

فرض کنید تصویر $I \in \mathbb{R}^{M\times N}$ و پنجرهٔ فیلتر $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد. محاسبهٔ مستقیم هر پیکسل از $I * H$، در حالت متعارف، به mn ضرب نیاز دارد. اگر پنجره را به صورت یک حاصل‌ضرب بیرونی بنویسیم، تنها دو فیلتر یک‌بعدی کافی است. ولی برای پنجرهٔ عمومی، موضوع به جای یک حاصل‌ضرب، **مجموعی از حاصل‌ضرب‌های بیرونی** است. از این رو باید سه مسئله را جدا کرد:

۱) **تساوی ساختاری:** چرا $H = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ و چرا r جمله در تجزیهٔ دقیق لازم است؟

۲) **بهینگی تقریب:** چرا نگه‌داشتن $k < r$ جملهٔ نخست، بهترین تقریب میان **همهٔ** ماتریس‌های رنک حداکثر k است، نه صرفاً تقریب‌های مبتنی بر SVD؟

۳) **اثر فیلترکردن:** چگونه خطای $H - H_k$ روی تصویر خروجی اثر می‌گذارد و چه زمانی کاهش هزینهٔ محاسبه واقعاً رخ می‌دهد؟

این سه موضوع در منابع دانشگاهی به ترتیب از نظریهٔ سیستم‌های خطی و فیلترهای تفکیک‌پذیر [۱۰، ۹، ۱۱]، تجزیهٔ ماتریسی و قضیهٔ تقریب کم‌رنک [۱، ۲، ۳، ۴، ۵] و تحلیل عددی پیوند می‌گیرند.

۲ از کانولوشن دوبعدی تا شرط رنک یک

۱.۲ تعریف دقیق کانولوشن

با فرض صفرشدن تصویر در خارج از دامنهٔ آن، کانولوشن گسسته را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Y(i,j) = (I * H)(i,j) = \sum_{p}\sum_{q} H(p,q) I(i-p, j-q). \tag{۱.۲}$$

مجموع‌ها روی تکیه‌گاه متناهی پنجره انجام می‌شوند. اگر $H(p,q) = a(p)b(q)$، با جابه‌جایی دو مجموع متناهی خواهیم داشت:

$$Y(i,j) = \sum_{p}\sum_{q} a(p)b(q) I(i-p, j-q) \tag{۲.۲}$$

$$= \sum_{p} a(p) \underbrace{\left[\sum_{q} b(q) I(i-p, j-q)\right]}_{B(i-p,j)}, \tag{۳.۲}$$

که در آن $B = I * b^T$ همان کانولوشن افقی است. در نتیجه:

$$\boxed{I * (ab^T) = (I * b^T) * a}. \tag{۴.۲}$$

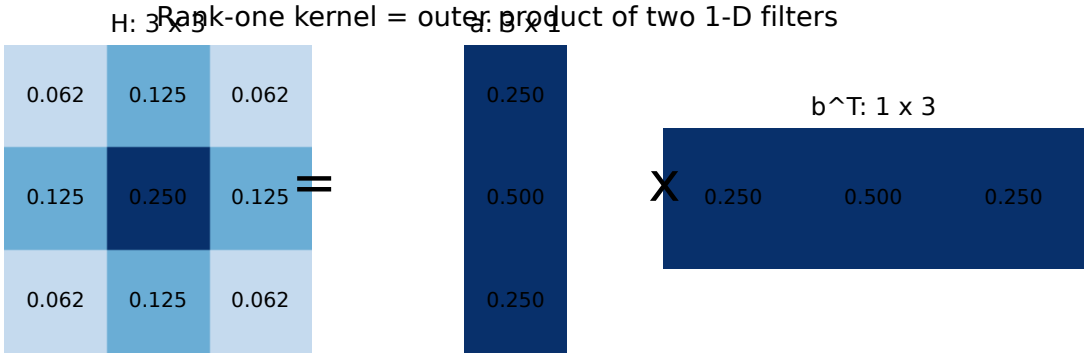
این یک **تساوی دقیق جبری** است؛ تقریب یا فرض آماری در آن به کار نرفته است. مستندات رسمی MathWorks دو مجموع و کاهش تعداد ضرب‌ها را صریحاً نمایش می‌دهد [۱۰] و تمرین درس بینایی ماشین دانشگاه میشیگان نیز از دانشجو می‌خواهد همین رابطه را از تعریف کانولوشن اثبات کند [۱۱].

۲.۲ چه زمانی پنجره تفکیک‌پذیر است؟

برای هر $H \neq 0$، سه گزاره معادل‌اند:

$$H = ab^T \iff \operatorname{rank}(H) = 1 \iff \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 = \cdots = 0. \tag{۵.۲}$$

اثبات: اگر $H = ab^T$ و $a, b \neq 0$، هر ستون H مضربی از a است؛ بنابراین فضای ستونی یک‌بعدی و رنک برابر یک است. برعکس، اگر رنک یک باشد، هر ستون مضربی از یک ستون غیرصفر a است؛ ضرایب این مضارب را در بردار b قرار می‌دهیم و $H = ab^T$ به دست می‌آید. در نهایت، از تجزیهٔ SVD که در بخش بعد تعریف می‌شود، تعداد مقادیر منفرد غیرصفر دقیقاً رنک ماتریس است. □



شکل ۱: یک پنجرهٔ 3×3 رنک یک به صورت حاصل‌ضرب بیرونی دو فیلتر یک‌بعدی. اعداد از فیلتر هموارسازی $[1,2,1]^T[1,2,1]/16$ محاسبه شده‌اند.

۳.۲ استخراج دو بردار بدون SVD

اگر H رنک یک باشد و $H_{ij} \neq 0$، با گرفتن ستون j و سطر i داریم:

$$\boxed{H = \frac{H[:, j]\, H[i, :]}{H_{ij}}}. \tag{۶.۲}$$

برای بررسی کافی است $H = ab^T$ بنویسیم. سمت راست برابر $(ab_j)(a_ib^T)/(a_ib_j) = ab^T$ می‌شود. این روش در بخش پنجره‌های تفکیک‌پذیر فصل سوم کتاب گونزالس و وودز نیز بیان شده است [۱۲].

۳ تجزیهٔ SVD برای رنک عمومی: برابری دقیق

۱.۳ تعریف و نتیجهٔ اصلی

برای ماتریس حقیقی $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$، تجزیهٔ مقادیر منفرد به شکل

$$H = U\Sigma V^T, \qquad U^TU = I_m, \quad V^TV = I_n \tag{۱.۳}$$

است؛ Σ ماتریسی قطری-مستطیلی با مقادیر $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_s \geq 0$ و $s = \min(m,n)$ است. بردار u_i ستون i از U و v_i ستون i از V است. رنک r تعداد $\sigma_i > 0$ است. با ضرب ماتریسیِ (۱.۳):

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T.} \tag{۲.۳}$$

این رابطه **تقریب نیست**؛ صرفاً بسط ضرب سه ماتریس است. به‌ویژه، برای $r = 1$ فقط یک جمله باقی می‌ماند. برای هر r، دقیقاً r جملهٔ رنک یک داریم.

۲.۳ چرا نمی‌توان در تجزیهٔ دقیق از r جمله کمتر داشت؟

برای هر دو ماتریس A, B نامساوی زیر برقرار است:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B), \tag{۳.۳}$$

زیرا فضای ستونی $A+B$ در مجموع فضاهای ستونی A و B قرار دارد و بُعد مجموع فضاها حداکثر مجموع ابعاد است. اگر $H = \sum_{i=1}^{t} a_i b_i^T$، از (۳.۳) نتیجه می‌شود

$$\operatorname{rank}(H) \leq \sum_{i=1}^{t} \operatorname{rank}(a_i b_i^T) \leq t.$$

پس برای ماتریسی با رنک r، هر نمایش دقیق به صورت مجموع حاصل‌ضرب‌های بیرونی، دست‌کم r جمله لازم دارد. چون بسط SVD در (۲.۳) دقیقاً r جمله دارد، از نظر **تعداد جمله‌های جداشدنی** کمینه است. این نکته فقط با «نوشتن فرمول SVD» به اثبات نمی‌رسد؛ نامساوی رنک برای نتیجه ضروری است.

۳.۳ تعبیر کانولوشنی دقیق برای رنک r

عملگر کانولوشن نسبت به پنجره خطی است. در نتیجه:

$$I * H = I * \Big(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \Big) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \big(I * (u_i v_i^T) \big) \tag{۴.۳}$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \Big((I * v_i^T) * u_i \Big)}. \tag{۵.۳}$$

هر جمله شامل فیلتر افقی، سپس فیلتر عمودی و در آخر وزن‌دهی و جمع است. می‌توان برای حذف ضرب جداگانهٔ σ_i، این ضریب را به صورت متقارن تقسیم کرد:

$$a_i = \sqrt{\sigma_i}\, u_i, \qquad b_i = \sqrt{\sigma_i}\, v_i, \quad H = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i^T. \tag{۶.۳}$$

تمایز مفهومی: «فیلتر رنک یک» با **یک جفت** فیلتر یک‌بعدی اجرا می‌شود؛ «فیلتر رنک r» دقیقاً به صورت **جمع** r **جفت** اجرا می‌شود. این نتیجه به‌خودی‌خود **هیچ ادعایی**

دربارهٔ بهترین تقریب رنک k ندارد؛ آن موضوع قضیهٔ بخش بعد است.

۴.۳ مثال ساختاری: لاپلاسین رنک دو

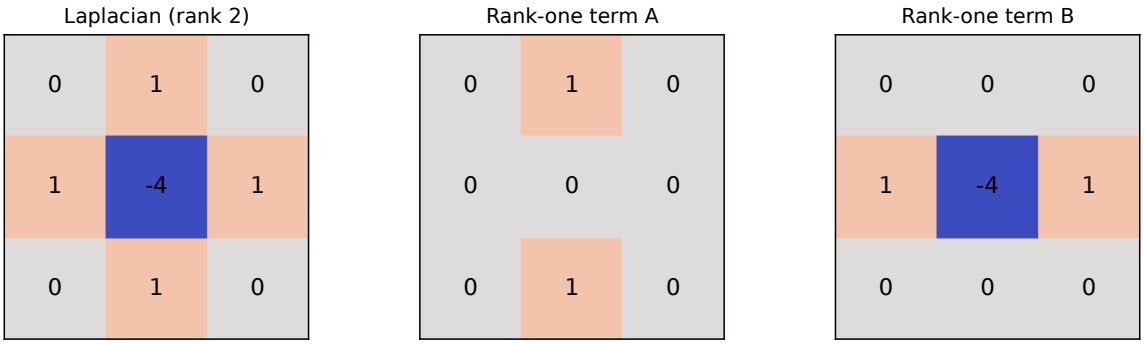
پنجرهٔ لاپلاسین چهارهمسایگی

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به صورت دقیق برابر است با

$$L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{B}. \tag{۷.۳}$$

چون دو ستون مستقل دارد، $\operatorname{rank}(L) = 2$؛ بنابراین دو جمله هم کافی و هم از نظر شمار جمله‌های رنک یک ضروری است. این نمایش الزاماً بسط SVD نیست، اما تفکیک‌پذیری دو جملهٔ آن کاملاً دقیق است.



شکل ۲: لاپلاسین با رنک دو و تجزیهٔ دقیق به دو جملهٔ رنک یک؛ مقادیر شکل مستقیماً از دو ضرب بیرونی به دست آمده‌اند.

۴ تقریب رنک k: از تعریف تا قضیهٔ بهینگی

۱.۴ مسئلهٔ بهینه‌سازی دقیقاً چیست؟

وقتی $k < r$، پنجرهٔ تقریبی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T. \tag{۱.۴}$$

ولی باید نشان داد که چرا این انتخاب از میان **تمام** ماتریس‌های رنک حداکثر k بهتر است. مسئله به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\min_{B\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \mathrm{rank}(B)\le k} \|H-B\|_F\,, \qquad \|A\|_F^2=\sum_{p,q}|A_{pq}|^2=\mathrm{tr}(A^TA). \tag{۲.۴}$$

توجه کنید که انتخاب $\mathrm{rank}(B)\le k$ از نظر ریاضی طبیعی‌تر از شرط رنک دقیقاً k است؛ اگر H رنک کمتر از k داشته باشد، خطای صفر هم مجاز می‌شود.

۲.۴ قضیهٔ Eckart–Young–Mirsky

قضیه. اگر H دارای مقادیر منفرد $\sigma_1\ge\cdots\ge\sigma_r>0$ و $0\le k<r$ باشد، آنگاه

$$\boxed{\min_{\mathrm{rank}(B)\le k}\|H-B\|_F^2=\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i^2}, \tag{۳.۴}$$

$$\boxed{\min_{\mathrm{rank}(B)\le k}\|H-B\|_2=\sigma_{k+1}}. \tag{۴.۴}$$

هر دو کمینه با $B=H_k$ حاصل می‌شوند. صورت اولیهٔ مسئله در مقالهٔ Eckart–Young (۱۹۳۶) و تعمیم آن به نرم‌های ناوردای یکانی در مقالهٔ Mirsky (۱۹۶۰) بررسی شده است [۱، ۲]. در ادامه اثبات بهینگی، نه صرفاً محاسبهٔ خطای یک کاندید، می‌آید.

۳.۴ گام اول: خطای تقریب پیشنهادی را محاسبه می‌کنیم

ابتدا از (۲.۳) و (۱.۴):

$$E_k:=H-H_k=\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_iu_iv_i^T.$$

با ضرب داخلی فروبنیوس، برای $i\neq j$ داریم:

$$\langle u_iv_i^T,u_jv_j^T\rangle_F=\mathrm{tr}(v_iu_i^Tu_jv_j^T)=(u_i^Tu_j)(v_i^Tv_j)=0. \tag{۵.۴}$$

همچنین $\|u_iv_i^T\|_F^2=1$؛ پس با فیثاغورس:

$$\boxed{\|H-H_k\|_F^2=\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i^2.} \tag{۶.۴}$$

اما این هنوز اثبات بهترین‌بودن نیست! فقط ثابت کردیم تقریب خاص H_k چنین خطایی دارد. اکنون باید نشان دهیم هر ماتریس B با رنک حداکثر k دست‌کم همین مقدار خطا دارد.

۴.۴ گام دوم: اثبات کامل کران پایین برای هر B

مرحلهٔ ۱ ـ تصویرگیری روی فضای ستونی B. یک ماتریس دلخواه B با $\mathrm{rank}(B)\le k$ بگیرید. بگذارید P تصویرگر متعامد روی فضای ستونی B باشد؛ پس

$$P^2=P=P^T,\qquad PB=B,\qquad \mathrm{tr}\,P=\mathrm{rank}\,P\le k.$$

با استفاده از $PB = B$، تفکیک زیر برقرار است:

$$H - B = (I_m - P)H + (PH - B). \tag{۷.۴}$$

دو جمله در ضرب داخلی فروبنیوس متعامدند، زیرا

$$\operatorname{tr}\left(H^T(I_m - P)^T(PH - B)\right) = 0$$

و علت این تساوی، $(I_m - P)P = 0$ و $(I_m - P)B = 0$ است. بنابراین:

$$\|H - B\|_F^2 = \|(I_m - P)H\|_F^2 + \|PH - B\|_F^2 \geq \|(I_m - P)H\|_F^2 . \tag{۸.۴}$$

مرحلهٔ ۲ ـ بازنویسی با رد ماتریسی. از $P = P^T = P^2$:

$$\|(I_m - P)H\|_F^2 = \operatorname{tr}\left(H^T(I_m - P)H\right) \tag{۹.۴}$$

$$= \|H\|_F^2 - \operatorname{tr}(PHH^T). \tag{۱۰.۴}$$

مرحلهٔ ۳ ـ محدودکردن انرژی ثبت‌شده توسط P. چون $HH^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 u_i u_i^T$، داریم

$$\operatorname{tr}(PHH^T) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \alpha_i, \qquad \alpha_i := u_i^T P u_i = \|P u_i\|_2^2 . \tag{۱۱.۴}$$

هر $\alpha_i \in [0,1]$. اگر بردارهای u_i را تا یک پایهٔ متعامد کامل ادامه دهیم، جمع تمام ضرایب برابر $\operatorname{tr} P$ خواهد بود؛ بنابراین

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \leq \operatorname{tr} P \leq k. \tag{۱۲.۴}$$

مرحلهٔ ۴ ـ نامساوی وزن‌دار. با $\lambda_i = \sigma_i^2$ و ترتیب نزولی این وزن‌ها، چون $0 \leq \alpha_i \leq 1$ و مجموعشان حداکثر k است، نمی‌توان از k وزن بزرگ‌تر انرژی بیشتری جمع کرد. اثبات صریح (برای $k < r$):

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i + \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i \tag{۱۳.۴}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i + \lambda_{k+1} \sum_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i) \tag{۱۴.۴}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (1 - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . \tag{۱۵.۴}$$

این اصل، صورت ساده‌ای از اصل بیشینهٔ Ky Fan است و بر هیچ حدس شهودی تکیه ندارد. لذا

$$\operatorname{tr}(PHH^T) \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 . \tag{۱۶.۴}$$

مرحلهٔ ۵ ـ ترکیب کران‌ها. از (۸.۴)، (۱۰.۴) و نتیجهٔ بالا:

$$\|H - B\|_F^2 \geq \|H\|_F^2 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \tag{۱۷.۴}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 = \|H - H_k\|_F^2 . \tag{۱۸.۴}$$

مرحلهٔ ۶ ـ حصول برابری. اگر $P = \sum_{i=1}^{k} u_i u_i^T$ و $B = PH$، از روابط SVD داریم $B = H_k$؛ در این حالت $PH - B = 0$ و تمام کران‌ها به برابری تبدیل می‌شوند. پس H_k **کمینهٔ جهانی** مسئلهٔ (۲.۴) است. ■

۵.۴ اثبات مستقل برای نرم طیفی

برای نرم طیفی نیز کران پایین را مستقیم اثبات می‌کنیم. اگر $\operatorname{rank}(B) \le k$ باشد، فضای پوچ آن حداقل بعد $n-k$ دارد. فضای $S = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ بعد $k+1$ دارد. با نامساوی ابعاد، اشتراک $S \cap \operatorname{null}(B)$ بردار واحدی مانند x دارد. از $Bx = 0$ و $x = \sum_{i=1}^{k+1} c_i v_i$:

$$\|H - B\|_2 \ge \|(H-B)x\|_2 = \|Hx\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 c_i^2 \right)^{1/2} \ge \sigma_{k+1}. \tag{۱۹.۴}$$

از سوی دیگر، $H - H_k$ در پایه‌های متعامد SVD دارای بزرگ‌ترین مقدار منفرد σ_{k+1} است و از این رو $\|H - H_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. بدین ترتیب (۴.۴) نیز ثابت می‌شود. این روش زیرفضایی در یادداشت‌های جبر خطی عددی دانشگاه UCLA ارائه شده است [۶].

۶.۴ یگانگی، تساوی مقادیر منفرد و رنک عددی

اگر $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ باشد (برای $1 \le k < r$)، بهترین تقریب رنک حداکثر k در نرم فروبنیوس یکتا است. اگر $\sigma_k = \sigma_{k+1}$، ممکن است چندین زیرفضای بهینه و چندین تقریب بهینه داشته باشیم؛ با این حال **مقدار** خطای کمینه همان (۳.۴) است. در محاسبهٔ شناور نیز «رنک عددی» وابسته به آستانهٔ انتخابی است و یک σ_i بسیار کوچک، لزوماً صفر جبری نیست. دقت این تفکیک در منابع تخصصی تقریب کم‌رنک بیان شده است [۷، ۸].

۵ مثال حل‌شدهٔ رنک سه و تقریب رنک‌های یک و دو

ماتریس متقارن زیر را در نظر بگیرید:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \tag{۱.۵}$$

چون H متقارن و مثبت معین است، مقادیر منفرد آن با مقادیر ویژه برابرند:

$$\sigma_1 = 3, \quad u_1 = v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \tag{۲.۵}$$

$$\sigma_2 = 1, \quad u_2 = v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \tag{۳.۵}$$

$$\sigma_3 = 0.2, \quad u_3 = v_3 = (0,0,1)^T. \tag{۴.۵}$$

در نتیجه تجزیهٔ دقیق عبارت است از

$$H = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \tag{۵.۵}$$

اگر فقط یک جمله نگه داریم، H_1 برابر جملهٔ اول است و

$$\|H - H_1\|_F = \sqrt{1^2 + 0.2^2} = \sqrt{1.04} \approx 1.019804.$$

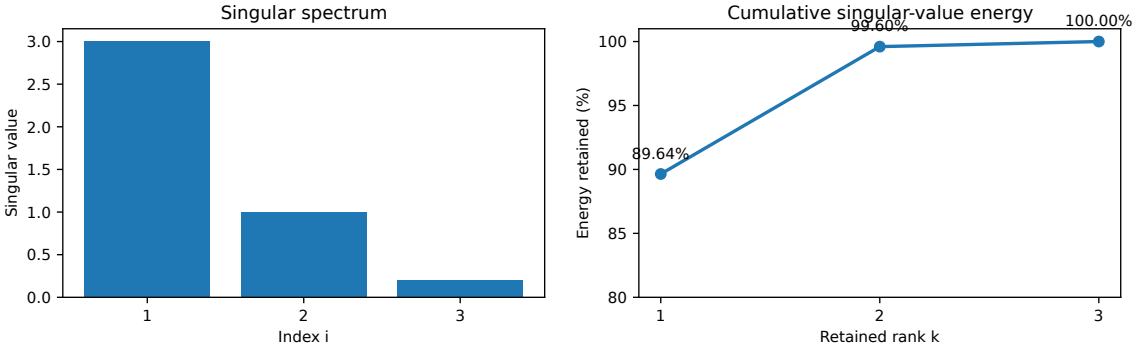
اگر دو جمله نگه داریم،

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \|H - H_2\|_F = 0.2.$$

انرژی کل پنجره $\|H\|_F^2 = 9 + 1 + 0.04 = 10.04$ است. سهم انرژی حفظ‌شده:

$$\eta_k := \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}, \quad \eta_1 = \frac{9}{10.04} \approx 89.64\%, \quad \eta_2 = \frac{10}{10.04} \approx 99.60\%.$$

این انرژی، **انرژی ماتریس پنجره** است؛ نباید بدون اندازه‌گیری خروجی تصویر، آن را «درصد حفظ کیفیت تصویر» نامید.



شکل ۳: طیف مقادیر منفرد و انرژی تجمعی ماتریس (۱.۵). همان‌طور که قضیه پیش‌بینی می‌کند، حذف مقدار منفرد سوم خطای فروبنیوس 0.2 ایجاد می‌کند.

۶ خطای تقریب در حوزهٔ پنجره و حوزهٔ تصویر

۱.۶ دو مسئلهٔ متفاوتِ بهینه‌سازی

قضیهٔ Eckart–Young–Mirsky می‌گوید H_k بهترین تقریب پنجره در نرم فروبنیوس است. اما برای یک تصویر ثابت I، پرسش دیگری داریم:

$$\min_{\mathrm{rank}(B)\le k} \|I * H - I * B\|_F . \tag{۱.۶}$$

این مسئله در حالت عمومی با (۲.۴) **یکسان نیست**، چون کانولوشن به ویژگی‌های طیفی تصویر وابسته است. مثال افراطی: اگر $I = 0$ باشد، خطای خروجی برای هر پنجره‌ای صفر است، اما خطای فروبنیوس خود پنجره همچنان ممکن است مثبت باشد. بنابراین بهینگیِ SVD برای پنجره، به‌تنهایی بهینگی خطای خروجی برای هر تصویر را نتیجه نمی‌دهد. این تمایز از **استدلال تحلیلی همین جزوه** حاصل می‌شود، نه ادعای مستقیم مراجع.

۲.۶ کران نقطه‌ای با نامساوی کوشی–شوارتس

بگذارید $E_k = H - H_k$ و $D = I * H - I * H_k = I * E_k$. برای هر موقعیت (i,j)، پنجرهٔ محلیِ متناظر از تصویر را P_{ij} بنامید. از تعریف کانولوشن و کوشی–شوارتس:

$$|D(i,j)| = |\left\langle E_k, \widetilde{P}_{ij} \right\rangle_F| \le \|E_k\|_F \, \|P_{ij}\|_F \,. \tag{۲.۶}$$

در این رابطه $\widetilde{P}_{ij}$ چرخش ۱۸۰ درجه‌ای پنجرهٔ محلی، در قرارداد کانولوشن است؛ نرم فروبنیوس در چرخش تغییر نمی‌کند. اگر $|I(i,j)| \le L$ و پنجره $m \times n$ باشد، آنگاه $\|P_{ij}\|_F \le \sqrt{mn}L$ و در نتیجه:

$$\boxed{|D(i,j)| \le L\sqrt{mn} \sqrt{\sum_{t=k+1}^{r} \sigma_t^2}.} \tag{۳.۶}$$

این یک **کران تضمینی** است، نه پیش‌بینیِ دقیق خطای واقعی در یک تصویر مشخص.

۳.۶ کران سراسری با نامساوی کانولوشن

برای تصاویر و پنجره‌هایی که با صفر به شبکهٔ $\mathbb{Z}^2$ گسترش داده شده‌اند، نامساوی جوان برای کانولوشن نتیجه می‌دهد

$$\|I * E_k\|_{\ell_2} \le \|I\|_{\ell_2} \, \|E_k\|_{\ell_1} \,. \tag{۴.۶}$$

با کوشی–شوارتس روی mn ضریب پنجره، $\|E_k\|_{\ell_1} \le \sqrt{mn}\, \|E_k\|_F$؛ بنابراین

$$\boxed{\|I * H - I * H_k\|_{\ell_2} \le \sqrt{mn}\ \|I\|_{\ell_2} \sqrt{\sum_{t=k+1}^{r} \sigma_t^2}.} \tag{۵.۶}$$

برش خروجی کامل به اندازهٔ تصویر نمی‌تواند نرم ℓ_2 را افزایش دهد؛ در نتیجه کران برای خروجی same با صفرگذاری سازگار نیز برقرار است. برای reflect و دیگر مرزها باید عملگر گسترش مرزی جداگانه تعریف و هنجار آن در کران منظور شود. این استنتاج ریاضی در این متن ارائه شده است؛ آن را نباید با خود قضیهٔ Eckart–Young–Mirsky خلط کرد.

۴.۶ انتخاب k بر اساس بودجهٔ خطای پنجره

برای تعیین کمترین رنک لازم با تلورانس نسبی ε، کافی است کوچک‌ترین kای را انتخاب کنیم که

$$\frac{\|H - H_k\|_F}{\|H\|_F} = \sqrt{\frac{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}} \le \varepsilon. \tag{۶.۶}$$

این انتخاب تضمین می‌کند که خطای **پنجره** نسبت به معیار مشخص‌شده کوچک باشد. اگر هدفْ خطای **تصویر** باشد، می‌توان از کران (۵.۶) استفاده کرد یا خطای واقعی را روی تصاویر نماینده اندازه گرفت.

۷ تحلیل دقیق هزینهٔ محاسباتی

برای تصویر $M \times N$ و پنجره $m \times n$، ضرب‌های تقریبی به‌ازای هر پیکسل خروجی چنین‌اند:

$$C_{\text{direct}} = mn, \tag{۱.۷}$$

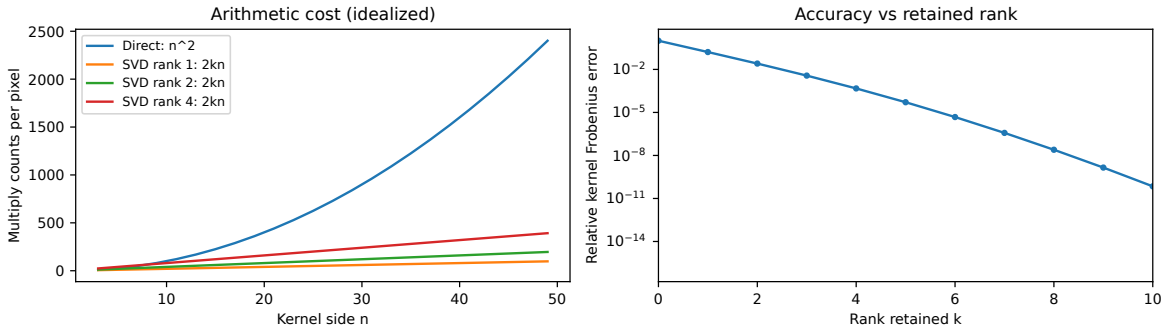
$$C_{\text{separable,rank } k} \simeq k(m+n), \tag{۲.۷}$$

و در حالت مربعی $m = n$:

$$\boxed{\frac{C_{\text{direct}}}{C_{\text{rank } k}} \simeq \frac{n}{2k}.} \tag{۳.۷}$$

این نسبت فقط سهم **ضرب‌ها** را می‌سنجد و هزینهٔ محاسبهٔ SVD، جمع k خروجی میانی، هزینهٔ حافظه، مرزها، اجرای برداری و شتاب‌دهنده‌ها را در بر ندارد. از نظر شمار ضرب، تقریب رنک k وقتی سودمند است که $k(m+n) < mn$؛ برای پنجرهٔ مربعی، شرط سادهٔ $k < n/2$ به دست می‌آید. برای پنجرهٔ ثابت و پردازش تصاویر فراوان، هزینهٔ یک‌بارهٔ SVD می‌تواند سرشکن شود؛ برای یک پنجرهٔ کوچک و یک تصویر کوچک ممکن است اجرای مستقیم سریع‌تر باشد. مقایسهٔ زمان واقعی باید با پیاده‌سازی و سخت‌افزار مشخص انجام شود.

پنجره	مستقیم	رنک یک	رنک دو
3×3	9	6	12
11×11	121	22	44
21×21	441	42	84
101×101	10201	202	404



شکل ۴: سمت چپ: شمار تقریبی ضرب‌ها برای کانولوشن مستقیم و تقریب‌های کم‌رنک. سمت راست: خطای نسبی فروبنیوس پنجرهٔ آزمایشی 19×19 بر حسب رنک حفظ‌شده.

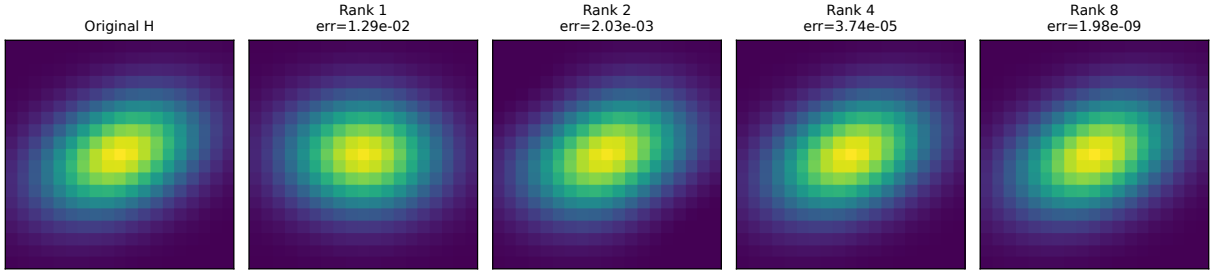
۸ آزمایش بازتولیدپذیر: یک پنجرهٔ غیرتفکیک‌پذیر

۱.۸ تعریف دقیق پنجره و تصویر مصنوعی

برای آنکه مثال از قبل رنک یک نباشد، یک پنجرهٔ شبه‌گوسیِ دوران‌یافته می‌سازیم:

$$\widetilde{H}(x,y) = \exp\left(-\frac{0.52x^2 + 0.95y^2 + 0.45xy}{18}\right), \quad x,y \in \{-9,\dots,9\}, \tag{۱.۸}$$

سپس با $H = \widetilde{H} / \sum_{x,y} \widetilde{H}(x,y)$ آن را نرمال می‌کنیم. وجود جملهٔ مختلط xy باعث می‌شود این تابع به‌صورت سادهٔ $a(x)b(y)$ تجزیه نشود. تصویر ورودی در کد همراه make_figures.py از پلهٔ شدت، دیسک روشن، تغییرات سینوسی و ناحیهٔ شطرنجی ساخته شده است؛ هیچ عکس خارجی در نتیجه دخیل نیست. خروجی مرجع با کانولوشن دوبعدی و شرط مرزی صفر، و خروجی کم‌رنک با دنباله‌های کانولوشن یک‌بعدی محاسبه شده‌اند.



شکل ۵: پنجرهٔ اصلی غیرتفکیک‌پذیر 19×19 و تقریب‌های SVD با رنک‌های ۱، ۲، ۴ و ۸. اعداد بالای پنل‌ها نرم فروبنیوس باقیماندهٔ مطلق هستند.

۲.۸ مقایسهٔ عددی خطاها

برای پنجرهٔ (۱.۸)، چند مقدار منفرد اول از محاسبهٔ عددی عبارت‌اند از

$$\sigma_1 = 0.07821383785, \quad \sigma_2 = 0.01274277452,$$
$$\sigma_3 = 0.00200605214, \quad \sigma_4 = 0.00029120541.$$

اندازه‌گیری مستقیم خطاها، با فرمول نسبی $\|H - H_k\|_F / \|H\|_F$ و $\|Y - Y_k\|_F / \|Y\|_F$، به صورت زیر است:

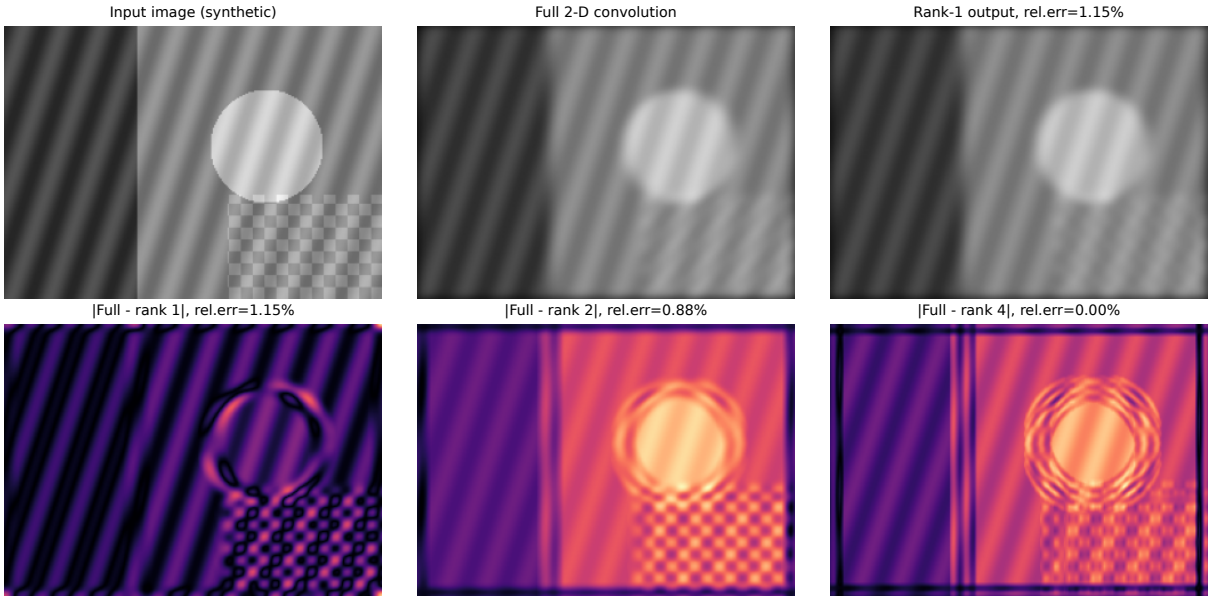
رنک k	خطای نسبی پنجره	خطای نسبی تصویر خروجی
1	16.2771%	1.1471%
2	2.5576%	0.8771%
4	0.04722%	0.004027%

درستی پیاده‌سازیِ تجزیهٔ کامل را نیز با محاسبهٔ تمام ۱۹ جمله آزمودیم: بیشینهٔ اختلاف مطلق هر پیکسل با کانولوشن دوبعدی مستقیم برابر حدود 1.9984×10^{-15} بود. این مقدار خطای گردکردن محاسبات شناور است، نه خطای نظری SVD.

۳.۸ دستور اجرای مجدد آزمایش

در پوشهٔ تحویلی، فایل make_figures.py تمامی شکل‌ها و فایل numerical_results.txt را تولید می‌کند. اجرای کد با Python و بسته‌های NumPy/SciPy/Matplotlib کافی است:

```
python -m pip install numpy scipy matplotlib
python make_figures.py
xelatex -interaction=nonstopmode SVD_Separable_Convolution_FA.tex
xelatex -interaction=nonstopmode SVD_Separable_Convolution_FA.tex
```



شکل ۶: بالا: تصویر مصنوعی، خروجی کانولوشن کامل و خروجی رنک یک. پایین: نقشهٔ قدرمطلق اختلاف پیکسلی برای رنک‌های یک، دو و چهار. این شکل نشان می‌دهد خطای پنجره و خطای تصویر از نظر عددی یکسان نیستند.

دو بار اجرای XeLaTeX برای ارجاعات درون متن و فهرست مطالب ضروری است.

۹ نکات تخصصی و مواردی که نباید اشتباه برداشت شوند

۱. **مقدار منفرد و مقدار ویژه یکی نیستند:** مقادیر منفرد ریشهٔ مقادیر ویژهٔ $H^T H$ هستند، نه لزوماً مقادیر ویژهٔ H. برای مثال متقارن مثبت معین، این دو منطبق شدند؛ برای پنجرهٔ عمومی خیر.

۲. **رنک جبری و رنک مؤثر یکی نیستند:** پنجرهٔ کمی دوران‌یافته ممکن است از نظر ریاضی رنک کامل داشته باشد، ولی چند مقدار منفرد نخست بیشتر انرژی آن را حمل کنند و تقریب کم‌رنک سودمند شود.

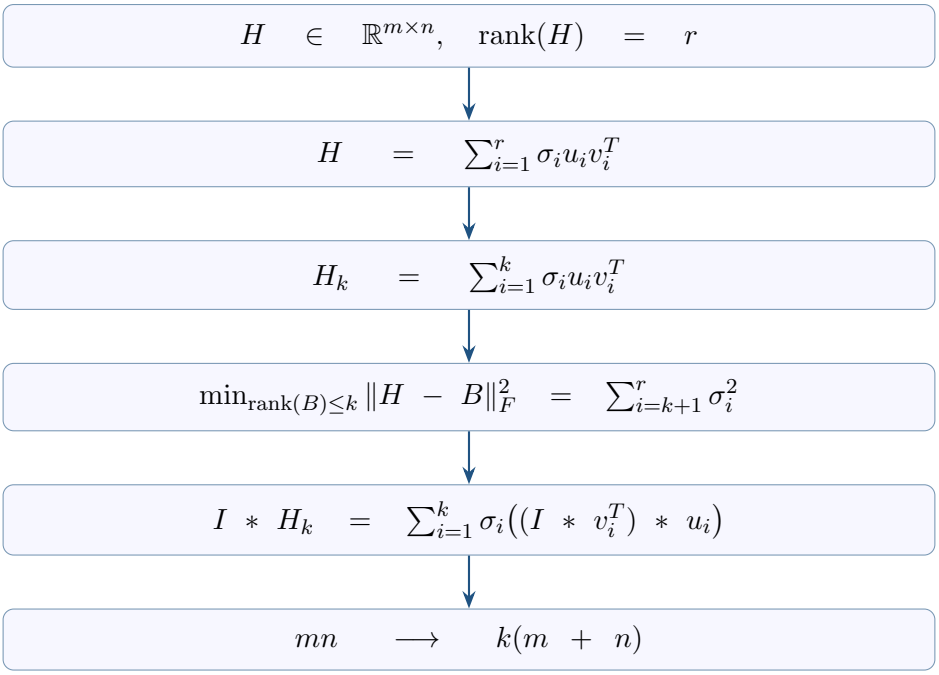
۳. **بهترین تقریب پنجره لزوماً بهترین تقریب خروجی نیست:** قضیه در نرم فروبنیوسِ پنجره بیان می‌شود؛ برای تصاویر خاص یا توزیع مشخص ورودی، مسئلهٔ بهینه‌سازی خروجی می‌تواند جواب دیگری داشته باشد.

۴. **فیلتر گوسی همواره تفکیک‌پذیر نیست:** گوسیِ دوبعدی با ماتریس کوواریانس قطری در محورهای تصویر، جداشدنی است؛ گوسیِ دارای جملهٔ xy در محورهای ثابت تصویر عموماً جداشدنی نیست.

۵. **شرط مرزی مهم است:** برابری فرمول‌ها بر روی شبکهٔ نامتناهی یا گسترش مرزی سازگار دقیق است. در نرم‌افزار، مدهای same/valid/full، انتخاب مرکز پنجره و تفاوت correlation/convolution باید یکسان تعریف شوند. مستندات SciPy این تفاوت را تشریح می‌کند [۱۳].

۶. **کم‌رنک‌بودن به‌تنهایی تضمین شتاب نیست:** با افزایش k، هزینهٔ $k(m+n)$ ممکن است از mn بیشتر شود. همچنین الگوریتم‌های آمادهٔ برداری یا FFT گاهی در عمل برتری دارند.

۱۰ جمع‌بندی ریاضی



این زنجیره نشان می‌دهد چهار گزاره باید از هم متمایز بمانند: **وجود تجزیه**، **حداقل شمار جمله‌های دقیق**، **بهینگی تقریب کم‌رنک** و **مزیت محاسباتی**. هیچ‌یک را نمی‌توان صرفاً به اتکای دیگری و بدون فرض‌های لازم نتیجه گرفت.

مراجع و پیوند دقیق به قسمت‌های اثبات

منابع زیر همگی به صفحات مشخص دانشگاهی، مقالهٔ اصلی یا مستندات علمی معتبر ارجاع دارند. **اثبات‌های بازنویسی‌شدهٔ این جزوه** در بخش‌های ۲ تا ۵ ارائه شده و مستقیماً قابل بررسی‌اند؛ منابع صرفاً برای انتقال بار اثبات معرفی نشده‌اند.

مراجع

[۱] C. Eckart and G. Young, “The Approximation of One Matrix by Another of Lower Rank,” Psychometrika, 1(3), 211–218, 1936. DOI: 10.1007/BF02288367. https://doi.org/10.1007/BF02288367. مقالهٔ اصلی صورت مسئلهٔ کم‌رنک.

[۲] L. Mirsky, “Symmetric Gauge Functions and Unitarily Invariant Norms,” Quarterly Journal of Mathematics, 11(1), 50–59, 1960. DOI: 10.1093/qmath/11.1.50. https://doi.org/10.1093/qmath/11.1.50. تعمیم به نرم‌های ناوردای یکانی.

[۳] D. Bindel, “Matrix Nearness Problems,” CS 6210: Matrix Computations, Cornell University, 15 October 2025. https://www.cs.cornell.edu/courses/cs6210/2025fa/lec/2025-10-15.html. بحث تقریب کم‌رنک، رد ماتریسی و نقش SVD.

[۴] G. Strang, “Lecture 7: Eckart–Young: The Closest Rank k Matrix to A,” MIT OpenCourseWare, 18.065, 2018. https://ocw.mit.edu/courses/18-065-matrix-methods-in-data-analysis-signal-processing-and-machine-learning-spring-2018/resources/lecture-7-eckart-young-the-closest-rank-k-matrix-to-a/. درس کامل قضیه و نرم فروبنیوس.

[۵] S. Boyd, “Low Rank Approximation and Extremal Gain Problems,” EE263 Course Reader, Stanford University. https://ee263.stanford.edu/archive/ee263_course_reader.pdf. تقریب رنک k و کران نرم طیفی.

[۶] N. Hu, “The Singular Value Decomposition,” UCLA numerical linear algebra notes. https://www.math.ucla.edu/~njhu/notes/nla/eig/svd/. اثبات کوتاه نرم طیفی با اشتراک زیرفضاها.

[۷] F. M. Faulstich, “Low Rank Approximation, Lecture 2,” MATH 6950, 12 January 2024. https://fabianfaulstich.github.io/MATH6950_2024/documents/lecture_notes/lec2/Lecture_2.pdf. بیان صریح قضیه برای نرم‌های فروبنیوس و طیفی.

[۸] University of Edinburgh, “Data Mining and Exploration,” lecture notes, Appendix A.10. https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/dme/2021/lecture-notes.pdf. تقریب کم‌رنک و شرط یگانگی.

[۹] Foundations of Computer Vision, MIT, Chapter 24, Section 24.2.4, “Low-Rank Filters.” https://visionbook.mit.edu/convolutional_neural_nets.html. تجزیهٔ پنجره به مجموع فیلترهای جداشدنی.

[۱۰] MathWorks, “isfilterseparable: Separable Two-Dimensional Filters,” https://www.mathworks.com/help/vision/ref/isfilterseparable.html documentation. دو مجموع کانولوشن و تشخیص رنک با SVD.

[۱۱] University of Michigan, EECS 442, Problem Set 1, 2023. https://www.eecs.umich.edu/courses/eecs442-ahowens/fa23/psets/ps1.pdf. تمرین اثباتِ تبدیل کانولوشن دوبعدی به دو کانولوشن یک‌بعدی.

[۱۲] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, Digital Image Processing, Fourth Edition, Global Edition, Chapter 3, Sec. 3.4, pp. 161–162 (printed pages). متن کتاب ضمیمه‌شده به پروژه، برای فیلترهای تفکیک‌پذیر و روش سطر–ستون.

[۱۳] SciPy, scipy.ndimage convolve / convolve1d API Documentation. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.ndimage.convolve.html. قرارداد کانولوشن و شرایط مرزی.